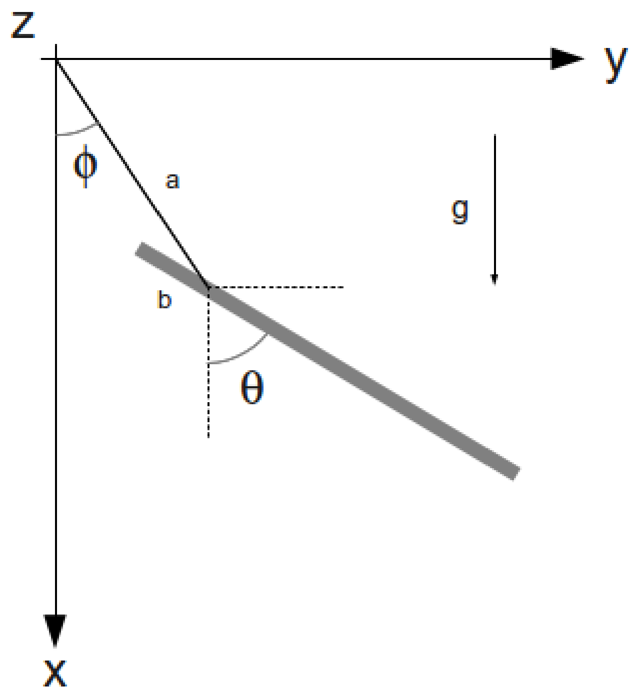
Una barra de longitud l y masa m cuelga de una cuerda de longitud a, como indica la figura, en un punto situado a una distancia b del extremo. El sistema oscila en el plano vertical sometido a la gravedad. Si existen coordenadas ignorables determinar el routhiano.



El sistema solo puede girar respecto al eje Z, al estar restringido el movimiento de la barra al plano vertical XY. Vemos que una rotación respecto al eje Z no es invariante, ya que modifica la energía potencial de la barra, y el momento angular asociado no se conserva. Tampoco se conserva el momento angular respecto al punto de sujeción de la barra, ya que la barra es asimétrica en ese punto. Sólo en el caso en que el punto de sujeción esté en la mitad de la barra se podrá conservar este momento angular. El sistema tampoco es invariante respecto a traslaciones en el eje X, ya que se modifica la energía potencial, ni en el eje Y ya que la cuerda tiene un punto fijo en el origen, y los momentos lineales asociados no se conservan. El sistema sólamente es invariante respecto a traslaciones en el eje Z, y conserva ese momento lineal.

Para definir la lagrangiana es necesario calcular las energías cinéticas y potencial. Dado que el punto de sujeción de la barra no coincide con el centro de masas, consideramos un elemento dm a una distancia r del punto de sujeción. El elemento dm tiene como coordenadas cartesianas

$$x = a\cos(\phi) + r\cos(\theta)$$

$$y = a\,sen(\phi) + r\,sen(\theta)$$

Las componentes de la velocidad son entonces

$$\dot{x} = -a\,sen(\phi)\dot{\phi} - r\,sen(\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{y} = a\cos(\phi)\dot{\phi} + r\cos(\theta)\dot{\theta}$$

y el módulo de la velocidad al cuadrado resulta

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=a^2\dot{\phi}^2+r^2\dot{\theta}^2+2\,r\,a\,sen(\phi+\theta)\dot{\phi}\,\dot{\theta}$$

Considerando una distribución lineal de masa, el elemento dm es

$$dm=\frac{m}{l}\,dr$$

su energía cinética es

$$d\,T=\frac{1}{2}\,dm\,v^2$$

y su energía potencial es

$$dV=-g\,dm\,x$$

La energía cinética total de la barra se obtiene por integración

$$T=\int dT=\int_{-b}^{l-b}\frac{1}{2}\frac{m}{l}\,dr\left[a^2\dot{\phi}^2+r^2\dot{\theta}^2+2\,r\,a\,sen(\phi+\theta)\dot{\phi}\dot{\theta}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m}{l}\left[r\,a^2\dot{\phi}^2+\frac{r^3}{3}\dot{\theta}^2+r^2\,a\,sen(\phi+\theta)\dot{\phi}\dot{\theta}\right]_{-b}^{l-b}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m}{l}\left[l\,a^2\dot{\phi}^2+\left(\frac{l^3-3\,l^2\,b+3\,l\,b^2}{3}\right)\dot{\theta}^2+(l^2-2\,l\,b)\,a\,sen(\phi+\theta)\dot{\phi}\,\dot{\theta}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}m\,a^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{l^2}{3}+b^2-l\,b\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(l-2\,b)\,a\,sen(\phi+\theta)\dot{\phi}\dot{\theta}$$

y del mismo modo la energía potencial total de la barra resulta

$$V=\int dV=\int_{-b}^{l-b}-g\,\frac{m}{l}\,dr\left[a\cos(\phi)+r\cos(\theta)\right]=$$

$$=-g\,\frac{m}{l}\left[r\,a\cos(\phi)+\frac{r^2}{2}\cos(\theta)\right]_{-b}^{l-b}=$$

$$=-g\,\frac{m}{l}\left[l\,a\cos(\phi)+\left(\frac{l^2-2\,l\,b}{2}\right)\cos(\theta)\right]=$$

$$=-g\,m\,a\cos(\phi)+g\,m\left(\frac{l}{2}-b\right)\cos(\theta)$$

En el caso general no existen coordenadas ignorables, ya que tanto ϕ como θ estan presentes en las expresiones de T y de V. Sólo en el caso en que b=l/2 las expresiones se simplifican a

$$T=\frac{1}{2}m\,a^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\frac{l^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$V=-g\,m\,a\cos(\phi)$$

donde la coordenada θ no esta presente. En ese caso el lagrangiano es

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\,a^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}^2+g\,m\,a\cos(\phi)$$

la cantidad de movimiento conjugada a θ, que se conserva, es

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=m\frac{l^2}{12}\dot{\theta}$$

y la routhiana se calcula como

$$R=p_\theta\dot{\theta}-L=6\frac{p_\theta^2}{m\,l^2}-\frac{1}{2}m\,a^2\dot{\phi}^2-g\,m\,a\cos(\phi)$$